Unidad V: Sistemas discretos (continuación)

Objetivo específico: Entender ampliamente el fenómeno del comportamiento de los modelos matemáticos para la resolución de problemas enfocados a las ecuaciones lineales en sistemas discretos.

Conceptos a desarrollar en la unidad: Dar al alumno las herramientas necesarias, para que pueda efectuar el análisis de los sistemas lineales discretos y continuos en la aplicación de las ecuaciones en los sistemas discretos.

5.1 Solución general de las recurrencias lineales[1]

Progresión Geométrica

Es una sucesión infinita de números donde el cociente de cualquier término (distinto del primero) entre su predecesor es una constante llamada razón común.

Relación de Recurrencia

Es una ecuación en donde para obtener el valor actual se depende de uno o más valores predecesores inmediatos a él.

$$a_{n+1} + ca_n = f(n),\ a_0 = A,\ n \geq 0$$
$$c_n a_n + c_{n-1}a_{n-1} + c_{n-2}a_{n-2} = f(n),\ a_0 = A_1,\ a_1 = A_2,\ n \geq 2$$

Condiciones Frontera o Iniciales

Son los valores iniciales que se necesitan para resolver la relación de recurrencia, se denotan como a0 o a1.

Primer Orden

Cuando la relación de recurrencia sólo depende de su predecesor inmediato, por ejemplo:

$$an+1 = 3an,\ a0 = 3,\ n \geq 0$$

Lineal

Cuando cada término con subíndice de la relación de recurrencia aparece elevado a la primera potencia, por ejemplo:

$$an+1 = 3an,\ a0 = 3,\ n \geq 0$$

Homogénea

Cuando f(n) = 0 para todo n $\in$ N, por ejemplo:

$$an+1 = 3an \Rightarrow an+1 - 3an = 0,\ a0 = 3,\ n \geq 0$$

Coeficientes Constantes

Cuando cada término con subíndice de la relación de recurrencia está multiplicado por una constante, por ejemplo:

$$an+1 = 3an,\ a0 = 3,\ n \geq 0$$

[1] Johnsonbaugh, Richard (2005). Matemáticas Discretas.

Segundo Orden

Cuando la relación de recurrencia depende de sus dos predecesores inmediatos, por ejemplo:

$$an = an-1 + 5an-2, a0 = 0, a1 = 1, n \geq 2$$

No Lineal

Cuando algún término con subíndice de la relación de recurrencia aparece elevado a una potencia diferente a la primera potencia, por ejemplo:

$$\boldsymbol{a}_{n+1}^{2} = 3\boldsymbol{a}_{n}^{2},\ a_0 = 3,\ n \geq 0$$

No Homogénea

Cuando f(n) $\neq$ 0 para todo n $\in$ N, por ejemplo:

$$an+1 = 3an + n \Rightarrow an+1 - 3an = n, a0 = 3, n \geq 0$$

Coeficientes Variables

Cuando algún término con subíndice de la relación de recurrencia está multiplicado por una valor variable, por ejemplo:

$$an = nan-1, a0 = 1, n \geq 1$$

Solución General

El valor de an es una función de n que no depende de los términos anteriores de la sucesión, una vez definido a0, que se obtiene a partir de la relación de recurrencia.

Transformación de una relación de recurrencia no lineal a lineal

Se puede transforma una relación de recurrencia no lineal a lineal para poder resolverla mediante una sustitución algebraica bn = an2. Ejemplo:

$$an+12 = 3an2, a0 = 3, n \geq 0$$

$$bn+1 = 3bn, b0 = 9, n \geq 0$$

Una vez hecho esto procedemos a resolverla como una relación de recurrencia lineal, para este ejemplo corresponde a de primer orden, homogénea y con coeficientes constantes. Después de resolverla sacamos raíz a cada número obtenido en la solución general para tener la solución general de la relación de recurrencia no lineal. Ejemplo:

$$bn = 9(3)n, b0 = 9, n \geq 0$$

$$an = 3(\sqrt{3})n, a0 = 3, n \geq 0$$

Solución General de las Relaciones de Recurrencia de Primer Orden, Lineales, Homogéneas y con Coeficientes Constantes

La solución general de la relación de recurrencia

$$an+1 = can, donde\ n \geq 0,$$

c es una constante y a0 = A es única y está dada por

an = Acn, n ≥ 0.

Está última ecuación es una función discreta cuyo dominio es el conjunto N de los enteros no negativos.

Solución General de las Relaciones de Recurrencia de Segundo Orden, Lineales, Homogéneas y con Coeficientes Constantes

La solución general de la relación de recurrencia

cnan + cn-1an-1 + cn-2an-2 = 0, donde n ≥ 2,

cn, cn-1, cn-2 son constantes diferentes de cero y tenemos a0 = A1, a1 = A2, realizamos lo siguiente:

- Sustituimos an = drn, donde c ≠ 0 y r ≠ 0. Obtendremos:

$$c_n dr^n + c_{n-1} dr^{n-1} + c_{n-2} dr^{n-2} = 0.$$

- Sacamos factor común. Obtendremos una ecuación cuadrática llamada ecuación característica:

$$c_n r^2 + c_{n-1} r^1 + c_{n-2} r = 0.$$

- Resolvemos la ecuación cuadrática y obtenemos las raíces de esa ecuación r1 y r2, estas son llamadas raíces características. Estas raíces pueden ser: números reales distintos, números reales iguales y números complejos conjugados, (sólo analizaremos los dos primeros casos).

- Si las raíces obtenidas son números reales distintos vamos formando la solución general de la siguiente manera:

$$a_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n.$$

- Si las raíces obtenidas son números reales iguales vamos formando la solución general de la siguiente manera:

$$a_n = c_1(r_1)^n + c_2 n(r_2)^n.$$

- Una vez teniendo este avance de la solución general con las condiciones iniciales formamos un sistema de ecuaciones y hallamos c1 y c2. Ejemplo:

$$a_0 = c_1(r_1)^0 + c_2(r_2)^0 \Rightarrow A_1 = c_1 + c_2$$

$$a_1 = c_1(r_1)^1 + c_2(r_2)^1 \Rightarrow A_2 = c_1 r_1 + c_2 r_2,$$

  Entonces tenemos los sistemas de ecuaciones:

$$A_1 = c_1 + c_2$$

$$A_2 = c_1 r_1 + c_2 r_2.$$

- Con los valores ya obtenidos de las raíces c1 y c2, y las constantes c1 y c2 obtenemos la solución general de la relación de recurrencia:

$$a_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n \Rightarrow \text{Raíces distintas}$$

$$a_n = c_1(r_1)^n + c_2 n(r_2)^n \Rightarrow \text{Raíces iguales}$$

Solución General de las Relaciones de Recurrencia de Primer o Segundo Orden, Lineales, No Homogéneas y con Coeficientes Constantes

La solución general de la relación de recurrencia

$$d_n a_n + d_{n-1} a_{n-1} + d_{n-2} a_{n-2} = f(n), \text{ donde } n \geq 2,$$

d_n, d_{n-1}, d_{n-2} son constantes diferentes de cero, f(n) $\neq$ 0 y tenemos $a_0 = A_1$, $a_1 = A_2$, se obtiene sumando la solución homogénea asociada (a_n^h) y la solución particular (a_n^p):

$$a_n = a_n^h + a_n^p$$

Realizamos lo siguiente:

- Resolvemos la relación homogénea asociada como se conoce (sin sacar las constantes), pasos anteriormente dados, y así obtenemos la solución homogénea asociada (a_n^h).

- Ahora iremos a obtener la solución particular. Lo primero es ver la función dada en $f(n)$ y observamos la *Tabla 1* para ver cual es la a_n^p:

$f(n)$	a_n^p
c, constante	A, constante
n	$A_1 n + A_0$
n^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
n^t, $t \in \mathbf{Z}^+$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + ... + A_1 n + A_0$
r^n, $r \in \mathbf{R}$	Ar^n
$n^t r^n$	$r^n (A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + ... + A_1 n + A_0)$

Tabla 5.1.1

- Si a_n^p contiene raíces distintas a las obtenidas en a_n^h entonces pasamos al siguiente paso. Si contiene una raíz igual a las obtenidas en a_n^h entonces $a_n^p = n a_n^p$ y pasamos al siguiente paso. Si contiene dos raíces iguales a las obtenidas en a_n^h entonces $a_n^p = n^2 a_n^p$ y pasamos al siguiente paso.

- Obtenemos el valor de cada constante de la a_n^p, o sea, las constantes A_t, A_{t-1}, ..., A_1, A_0, etc. Eso lo logramos sustituyendo cada término a_n de la relación de recurrencia dada por la a_n^p y resolviendo la ecuación. Por ejemplo: $f(n) = r^n$, por lo tanto $a_n^p = Ar^n$, entonces se obtiene algo así:
$$c_n A r^n + c_{n-1} A r^{n-1} + c_{n-2} A r^{n-2} = r^n$$

- Con la solución homogénea asociada (a_n^h) y la solución particular (a_n^p) obtenidas ya tenemos la solución general de la relación de recurrencia:

$$a_n = a_n^h + a_n^p$$

- Sólo falta calcular los valores c1 y c2 (de la solución homogénea asociada), mediante un sistema de ecuaciones, sustituyendo con las condiciones iniciales dadas. Y con esto tenemos ya la solución general de la relación de recurrencia.

5.1 Convolución y deconvolución de señales discretas[2]

En matemáticas y, en particular, análisis funcional, una convolución es un operador matemático que transforma dos funciones f y g en una tercera función que en cierto sentido representa la magnitud en la que se superponen f y una versión trasladada e invertida de g. Una convolución es un tipo muy general de media móvil, como se puede observar si una de las funciones se toma como la función característica de un intervalo.

Definición

La convolución de f y g se denota $f * g$. Se define como la integral del producto de ambas funciones después de desplazar una de ellas una distancia η.

$$f(t) * g(t) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) g(t-\eta) d\eta$$

El intervalo de integración dependerá del dominio sobre el que estén definidas las funciones. En el caso de un rango de integración finito, f y g se consideran a menudo como extendidas, periódicamente en ambas direcciones, tal que el término g(t - η) no implique una violación en el rango. Cuando usamos estos dominios periódicos la convolución a veces se llama cíclica. Desde luego que también es posible extender con ceros los dominios. El nombre usado cuando ponemos en juego estos dominios "cero-extendidos" o bien los infinitos es el de convolución lineal, especialmente en el caso discreto que presentaremos abajo.

Si X e Y son dos variables aleatorias independientes con funciones de densidad de probabilidad f y g, respectivamente, entonces la densidad de probabilidad de la suma X + Y vendrá dada por la convolución f * g.

Para las funciones discretas se puede usar una forma discreta de la convolución. Esto es:

$$f[m] * g[m] = \sum_{n} f[n] g[m-n]$$

Cuando multiplicamos dos polinomios, los coeficientes del producto están dados por la convolución de las sucesiones originales de coeficientes, en el sentido dado aquí (usando extensiones con ceros como hemos mencionado).

Generalizando los casos anteriores, la convolución puede ser definida para cualesquiera dos funciones de cuadrado integrable definidas sobre un grupo topológico localmente compacto. Una generalización diferente es la convolución de distribuciones.

Uso

La convolución y las operaciones relacionadas se encuentran en muchas aplicaciones de ingeniería y matemáticas.

- En estadística, como un promedio móvil ponderado.

- En teoría de la probabilidad, la distribución de probabilidad de la suma de dos variables aleatorias independientes es la convolución de cada una de sus distribuciones de probabilidad.

---

[2] Susanna S. Epp (2004) Discrete Mathematics with Applications (Third edition, International Edition,2004)

Tipos de Convolución

Convolución discreta

Cuando se trata de hacer un procesamiento digital de señal no tiene sentido hablar de convoluciones aplicando estrictamente la definición ya que solo disponemos de valores en instantes discretos de tiempo. Es necesario, pues, una aproximación numérica. Para realizar la convolución entre dos señales, se evaluará el área de la función : $x(\tau) * h(t-\tau)$. Para ello, disponemos de muestreos de ambas señales en los instantes de tiempo nt, que llamaremos $x[k]$ y $h[n-k]$ (donde n y k son enteros).El área es, por tanto,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t \cdot x[k] \cdot h[n-k] = t \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]\right]$$

La convolución discreta se determina por un intervalo de muestreo $t = 1$:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$

Convolución circular

Cuando una función g_T es periódica de período de T, entonces para aquellas funciones f para las que existe $f * g_T$, su convolución es también periódica e igual a:

$$(f * g_T)(t) \equiv \int_{t_0}^{t_0+T} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\tau + kT)\right] g_T(t-\tau)\, d\tau,$$

Donde: t_0 se escoge arbitrariamente. La suma bajo el integrando se denomina extensión periódica de la función f. Si g_T es una extensión periódica de otra función g, entonces $f * g_T$ se denomina convolución circular, cíclica, o periódica de f y g.

Método para calcular la convolución circular:

1. Tenemos dos círculos, uno exterior y otro interior. Vamos girando el círculo interior y sumando sus valores.
2. Si los dos círculos tienen diferentes tamaños, entonces el más pequeño le añadimos "0" al inicio, al final o al inicio y final.

[L >= L1 + L2-1]

Propiedades

Las propiedades de los diferentes operadores de convolución son 12

Conmutatividad

$$f * g = g * f$$

Asociatividad

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

Distributividad

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$$

Asociatividad con multiplicación escalar

$$a(f * g) = (af) * g = f * (ag)$$

Para todo número complejo o real a.

Regla de derivación

$$\mathcal{D}(f * g) = \mathcal{D}f * g = f * \mathcal{D}g$$

Donde Df denota la derivada de f o, en el caso discreto, el operador diferencia

$$\mathcal{D}f(n) = f(n+1) - f(n).$$

Teorema de convolución

$$\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}(f)) \cdot (\mathcal{F}(g))$$

Donde $\mathcal{F}$denota la Transformada de Fourier de f. Este teorema también se cumple con la Transformada de Laplace.

Convoluciones con deltas de Dirac

$$\begin{aligned} &f(t) * \delta(t) = f(t) \\ &f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0) \\ &f(t - t_1) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0 - t_1) \end{aligned}$$

Matriz de convolución

A veces es útil ver a la convolución como un producto matricial, sea $x[n]$una función discreta de n elementos, sea $h[n]$un sistema discreto de $n$elementos y sea $y$la respuesta a la convolución de $(2 * n) - 1$elementos, entonces $y[m] = x[n] * h[n]$se puede expresar por el siguiente producto matricial.

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ . \\ . \\ . \\ y[2*n-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ . \\ . \\ . \\ x[n] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} h[0] & h[1] & h[2] & ... & h[n] & 0_k & ... & 0_{2*n-1} & & \\ 0 & h[0] & h[1] & h[2] & ... & h[n] & 0_k & ... & 0_{2*n-2} & \\ 0 & 0 & h[0] & h[1] & h[2] & ... & h[n] & 0_k & ... & 0_{2*n-3} \\ . & & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & ... & h[0] & h[1] & h[2] & ... & h[n] & & \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Sea $x[n] =$[4 5 1 7] y sea $h[n] =$[1 2 3 1]

Entonces la matriz de convolución será $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

- Podemos observar como se añaden ceros a ambos lados. Esto se hace para poder igualar y así poder hacer la convolución. Esta técnica es conocida como "rellenado con ceros" (*zero-padding*).

Rellenado con ceros

Consiste en añadir 0s en una convolución o en el espectro de una señal, en este último caso aumentamos el dominio frecuencial de la magnitud de la señal pero no se mejora la resolución.

Convoluciones de grupos

Si G es cierto grupo dotado de una medida m (por ejemplo, un grupo topológico localmente compacto Hausdorff con la Medida de Haar) y si f y g son funciones real -o complejo- valuadas y m-integrables de G, entonces podemos definir su convolución como

$$(f * g)(x) = \int_G f(y) g(xy^{-1})\, dm(y)$$

En este caso también es posible dar, por ejemplo, un teorema de convolución, que sin embargo es mucho más difícil de presentar y que requiere de la teoría de la representación para estos tipos de grupos así como el Teorema de Peter-Weyl del Análisis armónico. Es muy difícil hacer dichos cálculos sin más estructura, y los grupos de Lie son los marcos donde se deben hacer las cosas.

Deconvolución

La deconvolución se refiere a las operaciones matemáticas empleadas en restauración de señales para recuperar datos que han sido degradados por un proceso físico que puede describirse mediante la operación inversa a una convolución. Desarrollada por la necesidad de conocer qué es lo que ocurre en un sistema, por vez primera se ve plasmada en el análisis de medidas sísmicas, y encuentra en la actualidad una amplia aplicación en muchos otros campos, tales como el control automático, el filtrado digital de sistemas, los sistemas computacionales a prueba de fallos, etc.

Aplicaciones de la deconvolución

Control Automático

La excitación que se brinda a un sistema, permitirá dar una respuesta de éste en un intervalo de tiempo adyacente al de la excitación, ya que sufre un pequeño retardo, al ser procesada y en la mayoría de los casos, transformada de acuerdo a las operaciones que el sistema requiera hacer. El proceso para conocer cómo opera el sistema dada las señales de entrada y salida, se le conoce, como deconvolución; descrito en muchos casos como la función de transferencia.

Óptica

En dispositivos ópticos 2D (como los telescopios) o 3D (como los microscopios confocales de fluorescencia) la convolución modeliza matemáticamente el proceso de formación de una imagen que sufre degradación por desenfoque y ruido. El desenfoque aparece inevitablemente en el límite de resolución del dispositivo debido a la difracción en las lentes. El ruido es cuando menos ruido fotónico, un término que se refiere a las variaciones de flujo inherentes a las propiedades estadísticas de los fotones. Puede haber otros ruidos superpuestos, pero este es inevitable, sobre todo en los límites de baja intensidad.

La formación de la imagen se puede describir mediante la convolución de la señal original con la función de dispersión del punto (PSF). Esta función no es más que la imagen de un objeto luminoso puntual tal y como se registraría en el dispositivo que, si bien resulta difícil de adquirir, se puede conseguir mediante procedimientos de calibrado o calcular teóricamente.

En sistemas incoherentes como estos dispositivos (en los que la luz de distintas fuentes no genera interferencias), el proceso de formación de la imagen es lineal, y se puede describir mediante teoría de sistemas lineales. Esto significa que cuando las imágenes de dos objetos A y B se registran simultáneamente, el resultado es equivalente a la suma de sus imágenes registradas independientemente. En otras palabras: la imagen de A no se ve afectada por la de B, y viceversa.

Debido a esta propiedad de linealidad la imagen de cualquier objeto complejo se puede "calcular" cortando el objeto en partes pequeñas, registrando sus imágenes independientemente, y después sumando todos los resultados. Cuando se divide el objeto en partes extremadamente minúsculas, en partículas puntuales de diferentes intensidades, la imagen se puede concebir como la suma de muchas PSF, cada una situada en la posición de cada partícula original y ajustada su intensidad de acuerdo con la del punto correspondiente.

Resumiendo: la formación de la imagen en un dispositivo óptico queda descrita por completo mediante su PSF.

Podemos por lo tanto imaginar que la imagen se forma en el microscopio o en el telescopio reemplazando cada fuente de luz puntual (o al menos de tamaño menor que la resolución del aparato) por su PSF, multiplicada por la intensidad correspondiente. Este proceso se describe matemáticamente con una ecuación de convolución:

$$f * g = h$$

donde la imagen h surge de la convolución de las fuentes reales de luz f (el objeto) y la PSF g. El operador de convolución $*$ implica una integral en todo el espacio:

$$h(\vec{x}) = (f * g)(\vec{x}) = \int f(\vec{r})g(\vec{x} - \vec{r})d^3\vec{r}$$

Se puede interpretar esta ecuación como sigue: la imagen registrada $h(\vec{x})$ se compone de vóxeles (en el caso general tridimensional) o de píxeles (en el caso 2D de la imagen de un telescopio) situados en diversas coordenadas $\vec{x} = (x, y, z)$. La intensidad registrada en cada vóxel se debe a las distintas contribuciones de todos los puntos luminosos del objeto f, estando ponderadas sus intensidades por la PSF g en función de la distancia al punto considerado. Cuanto más lejos esté la fuente luminosa, menor será su contribución a la intensidad registrada localmente.

En la realidad la situación es algo más compleja: si tenemos en cuenta el ruido, la formación de la imagen se expresa mediante

$$(f * g) + \epsilon = h$$

en donde ϵes el ruido que se introduce en la imagen registrada.

Si la convolución implica reemplazar cada fuente luminosa puntual original por su correspondiente PSF para producir una imagen borrosa, el proceso de restauración sigue el camino inverso, recolectando toda la luz dispersa y poniéndola en su sitio original de nuevo. Esto produce una mejor representación del objeto real, más clara a nuestros ojos.

En términos matemáticos, la deconvolución es simplemente la resolución de la ecuación de convolución anterior, donde conocidas la imagen convolucionada hy la PSF g, más un modelo físico del ruido ϵ, se obtendría la distribución de luz original f. Pero la resolución de esta ecuación puede ser un complejo problema inverso en la práctica, debido a una dificultosa estimación de la PSF o a los efectos del ruido. Para ello se suelen emplear algoritmos iterativos, como el de estimación de máxima verosimilitud en microscopía, o la deconvolución ciega en astronomía, que sucesivamente van mejorando una estimación inicial del objeto real hasta alcanzar cierto criterio de calidad preestablecido.